Fourth Pan-American Congress of Applied Mechanics, Buenos Aires, Argentina, January 1995
Applied Mechanics in the Americas, Vol. II, 1995

UN NUEVO METODO PARA LA CALIBRACION DE MAGNETOMETROS

Roberto Alonso
Jefe, Grupo de Control de Actitud
Comisión Nacional de Actividades Espaciales
Avenida Dorrego 4010
1425 Buenos Aires
Argentina

y

Malcolm D. Shuster
Professor, Department of Aerospace Engineering,
Mechanics and Engineering Science
University of Florida
Gainesville, FL 32611
USA

RESUMEN

Un nuevo algoritmo se presenta para la estimación de la polarización de un magnetómetro previo a todo conocimiento de la actitud del satélite. El comportamiento del nuevo algoritmo es muy superior a los previos y presenta también una estimación donde los otros métodos dejan de hacerlo.

INTRODUCCION

Debido al frecuente uso de los magnetómetros en el sistema de control de la actitud de satélites, ya sea como sensor de la actitud o como parte del sistema de comando de los actuadores magnéticos, es imperativo que una correcta estimación de la polarización (inglés: *bias*) del magnetómetro sea determinada en el comienzo de la misión, previo al conocimiento de la actitud del satélite. Los métodos actuales utilizados en la determinación de la polarización del magnetómetro sin el conocimiento de la actitud [1–3] sufren todos de importantes defectos, como un tratamiento incorrecto de los errores de medición o problemas de la convergencia del método numérico iterativo.

Un nuevo algoritmo se propone para determinar el vector de polarización del magnetómetro sin el conocimiento de la actitud. Este algoritmo se distingue por el hecho de tratar correctamente el comportamiento estadístico de las mediciones y de reducir los datos en dos estadísticos suficientes, uno vectorial y otro escalar, para lograr un método eficiente desde el punto de vista computacional. Además, este estadístico suficiente vectoreal es un estimador consistente del vector de polarización, y en consecuencia en la mayoría de los casos provee una adecuada estimación.

Se asume que las lecturas del magnetómetro en la terna del instrumento pueden ser escritas como

$$\mathbf{B}_k = A_k \mathbf{H}_k + \mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}_k , \quad k = 1, \ldots , N , \tag{1}$$

donde $\mathbf{B}_k$ es el campo magnético sensado (más exactamente: la inducción magnética) en el tiempo t_k; $\mathbf{H}_k$ es el valor correspondiente del campo geomagnético expresado en el sistema de coordenadas fijo en la Tierra ; A_k es la actitud del magnetómetro con respecto al anterior sistema de coordenadas ; la variable $\mathbf{b}$ es el vector de polarización del magnetómetro ; y $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ es el ruido de medición. Este ruido de medición, que incluye tanto los errores del sensor y del modelo del campo geomagnético, se asume en general como blanco y Gaussiano. A partir de la ecuación (1), es posible definir las mediciones efectivas y el ruido de medición efectivo según

$$z_k \equiv |\mathbf{B}_k|^2 - |\mathbf{H}_k|^2 , \tag{2a}$$

$$v_k \equiv 2(\mathbf{B}_k - \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_k - |\boldsymbol{\varepsilon}_k|^2 . \tag{2b}$$

Entonces,

$$z_k = 2\,\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 + v_k , \quad k = 1, \ldots , N , \tag{3}$$

y v_k es aproximadamente Gaussiano y blanco con variancia σ_k^2.

El estimador de máxima verosimilitud [4] de $\mathbf{b}$ minimiza la siguiente función de costo

$$J(\mathbf{b}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{\sigma_k^2} (z_k - 2\,\mathbf{B}_k \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 - \mu_k)^2 + \log \sigma_k^2 + \log 2\pi \right] , \tag{4}$$

que es la función logaritmo negativo de verosimilitud de $\mathbf{b}$ dada las mediciones. Debido a que ésta función es cuártica en el vector de polarización del magnetómetro, la minimización no puede lograrse en forma analítica, y a menos que un buen valor inicial sea conocido, el proceso iterativo no conduce al mínimo global.

EL ALGORITMO

Para evitar la optimización no lineal se define las siguientes variables centradas

$$\bar{z} \equiv \bar{\sigma}^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2} z_k , \qquad \bar{\mathbf{B}} \equiv \bar{\sigma}^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2} \mathbf{B}_k , \qquad \bar{v} \equiv \bar{\sigma}^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2} v_k , \qquad \bar{\mu} \equiv \bar{\sigma}^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2} \mu_k , \tag{5}$$

donde

$$\frac{1}{\overline{\sigma}^2} \equiv \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2} \,. \tag{6}$$

En consecuencia,

$$\overline{z} = 2\,\overline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{b} - |\mathbf{b}|^2 + \overline{v} \,. \tag{7}$$

La definición ahora de

$$\tilde{z}_k \equiv z_k - \overline{z}\,, \qquad \widetilde{\mathbf{B}}_k \equiv \mathbf{B}_k - \overline{\mathbf{B}}\,, \qquad \tilde{v}_k \equiv v_k - \overline{v}\,, \qquad \tilde{\mu}_k \equiv \mu_k - \overline{\mu}\,, \tag{8}$$

conduce a

$$\tilde{z}_k = 2\,\widetilde{\mathbf{B}}_k \cdot \mathbf{b} + \tilde{v}_k\,, \quad k = 1, \ldots, N\,. \tag{9}$$

Las mediciones efectivas $\tilde{z}_k$ son lineales en el vector de polarización del magnetómetro, sin embargo no son independientes,

$$\sum_{k=1}^{N} \tilde{z}_k = 0\,, \tag{10}$$

y son correladas. En consecuencia no se puede escribir una función logaritmo negativo de verosimilitud en términos de las variables $\tilde{z}_k$, $k = 1, \ldots, N$, en forma análoga a la ecuación (4). Sin embargo en un trabajo anterior, Gambhir [2] propuso una función (incorrecta) de costo como tal (sin los factores de peso estadísticamente adecuados). Aunque ésta función de costo conduce a un estimador insesgado, es difícil asociar límites de confianza a las estimaciones resultantes, y el algoritmo no ofrece medios para determinar la pérdida de precisión debida a los datos descartados.

Un estimador formulado correctamente (pero basado solamente sobre las mediciones $\{\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{N-1}\}$) milagrosamente conduce a una función de costo muy similar a aquélla de la ecuación (4) y conduce al siguiente estimador óptimo

$$\widetilde{\mathbf{b}}^* = \widetilde{P}_{bb} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2} (\tilde{z}_k - \tilde{\mu}_k)\, 2\widetilde{\mathbf{B}}_k\,, \tag{11}$$

donde la covariancia de los errores de estimación del estimador *centrado* es dada por

$$\widetilde{P}_{bb} = \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2} 4\, \widetilde{\mathbf{B}}_k \widetilde{\mathbf{B}}_k^{\mathrm{T}} \right]^{-1} \,. \tag{12}$$

Este estimador, que llamamos *la aproximación del centrado* (inglés: *centering approximation*), es insesgado y consistente.

La aproximación del centrado substituye esencialmente un conjunto de mediciones $\{z_1, \ldots, z_N\}$ por un conjunto equivalente de mediciones efectivas $\{\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{N-1}, \overline{z}\}$. Se puede demostrar rigurosamente que $\widetilde{\mathbf{b}}^*$ es un estadístico suficiente del conjunto de mediciones $\{\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_{N-1}\}$. En consecuencia el conjunto $\{\widetilde{\mathbf{b}}^*, \overline{z}\}$ es un estadístico suficiente del conjunto total de mediciones.

Además, se puede demostrar que $\widetilde{\mathbf{b}}^*$ y $\overline{z}$ no son correlados. Entonces, la función de costo dada por la ecuación (4) se puede reescribir como

$$J(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\,(\widetilde{\mathbf{b}}^* - \mathbf{b})^T \widetilde{P}_{bb}^{-1} (\widetilde{\mathbf{b}}^* - \mathbf{b}) + \frac{1}{2\,\overline{\sigma}^2}\,(\overline{z} - 2\,\overline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 - \overline{\mu})^2$$
$$+ \text{términos independientes de } \mathbf{b}\,. \quad (13)$$

La dependencia cuártica es ahora reducida a un único término cuyo peso estadístico será pequeño si la distribución de las mediciones del campo magnético es isotrópica. No obstante, si los datos no son isotrópicos, este término puede ser tan importante como la contribución del total de los datos centrados. La importancia del término cuártico, que llamamos *la corrección del centro* (inglés: *center correction*), puede ser estimada antes de la minimización de la ecuación (13) por la contribución de la segunda parte de $J(\mathbf{b})$ a la matriz de información de Fisher F_{bb}.

El algoritmo anterior fue extendido para la estimación de factores de escala y correcciones por no ortogonalidad. Estas extenciones serán presentadas en un trabajo posterior junto a comparaciones más detalladas con otros métodos.

RESULTADOS NUMERICOS

La ventaja del nuevo método puede ser visualizada en los siguientes casos. Se considera un satélite en una órbita circular con una altitud de 560 km y con una inclinación de 38 grados. Estos son los parámetros orbitales del satélite SAC-B. Se supone que el satélite sea estabilizado inercialmente en tres ejes y adquiera datos del magnetómetro cada 10 segundos. Se supone, además, que el error del magnetómetro sea de 2. mG en cada eje. Para una polarización pequeña igual a (10., 20., 30.) mG hemos usado el antiguo método, esto es el método de Gauss–Newton aplicado a la función cuártica del costo (la ecuación (4)), con un valor inicial de (0., 0., ,0.) mG y la aproximación del centrado seguida del método de Gauss–Newton aplicado a la corrección del centro (la ecuación (13)). En el nuevo método propuesto aquí, la primera iteración es simplemente la aproximación del centrado. Las iteraciones sucesivas son de la función completa de costo (la ecuación (13)). Los resultados para dos órbitas completas de datos se presentan en la Tabla 1. Los intervalos de error de 1σ de las estimadas finales son de (±.13, ±.19, ±.12) mG.

Tabla 1. Comparación de las Estimaciones (en mG) con la Función Cuártica de Costo (la ecuación (4)) y con la Aproximación del Centrado Seguida de la Corrección del Centro (Nuevo Método). La polarización real es de (10., 20., 30.) mG.

Iteración	Antiguo Método	Nuevo Método
1	[10.08, 19.27, 33.04]	[9.82, 20.08, 29.05]
2	[9.84, 20.18, 29.91]	[9.90, 19.83, 29.94]
3	[9.84, 20.19, 29.89]	[9.90, 19.83, 29.93]
4	[9.84, 20.19, 29.89]	[9.90, 19.83, 29.93]

Los dos métodos tienen resultados casi idénticos en este caso y la convergencia es igualmente rápida. Diferencias en los dos resultados son debidas al redondeo computacional. Consideramos, también, el caso donde la polarización es grande respecto al campo magnético ambiente, decimos (100., 200., 300.) mG. En este caso, se obtienen los resultados presentados en la Tabla 2. Los intervalos de error de 1σ del nuevo método son de $(\pm.12, \pm.10, \pm.12)$ mG.

En este caso el antiguo algoritmo ya no converge al mínimo real de la función del costo sino que lo hace a un mínimo local que está más cerca al valor inicial de la recursión Gauss–Newton. El nuevo método funciona bien. La aproximación del centrado sin corrección es ciertamente útil para todas las aplicaciones excepto donde se requiere una muy alta precisión. Debido a que la aproximación del centrado es muy cercana al mínimo global, una única iteración es suficiente para obtener la convergencia. Es claro que el estimador del nuevo método es consistente con el valor real dentro de los intervalos de confianza (1σ) computados.

Tabla 2. Comparación de las Estimaciones (in mG) del Antiguo Método y del Nuevo Método. El valor real de la polarización es de (100., 200., 300.) **mG.**

Iteración	Antiguo Método	Nuevo Método
1	[107.62, 259.77, 2.85]	[99.82, 200.63, 298.02]
2	[51.51, 398.62, −368.88]	[99.97, 200.11, 299.81]
3	[70.35, 358.17, −196.33]	[99.97, 200.11, 299.81]
4	[72.13, 340.88, −145.65]	...
5	[71.78, 338.71, −140.60]	...
6	[71.70, 338.64, −140.62]	...
7	[71.70, 338.64, −140.62]	...

El nuevo algoritmo evita la pobre convergencia del método de Thompson et al. [2] y la aproximación no justificada de Davenport [3]. A diferencia del método de Davenport el nuevo método es consistente en cada etapa. La aproximación del centrado aquí es muy similar a la aproximación del centrado usada por Gambhir [1]. Sin embargo, el algoritmo de Gambhir no trata las estadísticas correctamente y tampoco no presenta el medio para computar la corrección debida a los datos descartados sin computar la función de costo completa.

El algoritmo presentado aquí ha sido extendido para incluir también la estimación de los factores de escala y de las correcciones por no ortogonalidad del magnetómetro. Un trabajo posterior incluirá estos estudios y también comparaciones numéricas más detalladas con los otros métodos.

CONCLUSIONES

Un nuevo método eficiente fue presentado para la estimación de la polarización de magnetómetros en órbita previo a la información de actitud. Este método tiene un comportamiento muy superior a los métodos previos y presenta una estimación precisa en los casos donde los otros métodos no lo hacen.

RECONOCIMIENTO

Uno de los autores (R. A.) desea agradecer al Dr. Henry Hoffman, al Dr. F. Landis Markley y al Guidance and Control Branch del Goddard Space Flight Center (GSFC), NASA, por la hospitalidad durante su visita en los Estados Unidos cuando el presente trabajo fue efectuado. Asimismo él agradece a la Comisión Nacional de Actividades Espaciales (CONAE) y al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por el apoyo financiero y académico aportado durante su estadía en el GSFC, EEUU.

REFERENCIAS

[1] GAMBHIR, B., 1975, "Determination of Magnetometer Biases Using Module RESIDG," Computer Sciences Corporation, Report No. 3000-32700-01TN.

[2] THOMPSON, R. H., NEAL, G. N., and SHUSTER, M. D., 1984, "Magnetometer Bias Determination and Spin-Axis Attitude Estimation for the AMPTE Mission,"*Journal of Guidance Control and Dynamics*, Vol. 7, No. 4, pag. 505–507.

[3] DAVENPORT, P. B., RUMPL, W. M., and WELTER, G. L., 1988, "In-Flight Determination of Spacecraft Magnetic Bias Independent of Attitude," *Proceedings, Flight Mechanics/Estimation Theory Symposium*, NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, 10–11, pag. 326–343.

[4] SORENSON, H. W., 1980, *Parameter Estimation*, Marcel Dekker, New York.