529.706 AIAA 82-0070R

Использование фильтров Калмана для оценивания пространственной ориентации КЛА [1]

И. Дж. Леффертс, Ф. Л. Маркли, М. Д. Шустер

Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation

E.J. Lefferts
NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland
F.L. Markley
Naval Research Laboratory, Washington, D.C.
and
M.D. Shuster
Business and Technological Systems, Inc., Seabrook, Maryland

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе представлен обзор методов реализации фильтров Калмана в задачах оценивания пространственной ориентации КЛА и развития этих методов за два последних десятилетия.

Этот обзор не претендует на полноту, а затрагивает лишь алгоритмы, применимые к КЛА с трехосными гироскопами и датчиками углового положения. Нам кажется, что именно такие системы позволяют наиболее эффективно использовать преимущества фильтров Калмана.

Представлено в качестве доклада 82—0070 на 20-ю конференцию AIAA по аэрокосмическим наукам, Орландо, шт. Флорида, 11—14 января 1982 г.; получено 11 декабря 1981 г.; переработанный вариант получен 21 мая 1982 г. Эта работа принадлежит правительству США и, следовательно, является общественным достоянием.

[1] Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1982, v 5, No. 5, pp. 417—429. Перевод Е. Д. Боданского.

И. Дж. Леффертс (E. J. Lefferts) родился в 1925 г. в Нью-Йорке и вырос в Филадельфии. В 1951 г. получил степень бакалавра по педагогике в государственном Уэст-Честерском колледже, Уэст-Честер, шт. Пенсильвания, а в 1953 г.— степень магистра искусств по математике в Темплском университете, шт. Филадельфия. С 1953 по 1967 г. он работал в Glenn L. Martin Company (ныне Martin—Marietta Corporation), где занимался проблемами аналогового моделирования, оптимального управления, теорией фильтрации и теорией устойчивости по Ляпунову. С 1959 по 1963 г. был членом группы Научно-исследовательского института перспективных исследований при Martin Company. С 1967 г. работал в Центре космических полетов им. Годдарда при NASA в Гринбельте, шт. Мэриленд, а в 1972 г. стал начальником отдела динамики угловых движений и отделения обработки данных. Он является автором многочисленных статей по вопросам оценивания, управления и устойчивости. Руководил анализом пространственной ориентации КЛА многих программ NASA, включая спутник прикладного назначения (ATS-6), спутник для исследования Солнца в период максимальной активности и «Ландсат-Д».

Ф. Л. Маркли (F. L. Markley) родился в 1939 г. в Филадельфии, шт. Пенсильвания. В 1962 г. получил степень бакалавра по прикладной физике в Корнельском университете, а в 1967 г.— доктора философии по физике в Калифорнийском университете в Беркли. С 1967 по 1968 г. он был действительным членом Национального научного фонда в Центре по теоретической физике при Мэрилендском университете, а с 1968 по 1974 г.— доцентом по физике в Вильямсовском колледже, Вильямстаун, шт. Массачусетс. В 1974 г. он поступает в отделение системных исследований Computer Sciences Corporation в Силвер-Спринг, шт. Мэриленд, где занимается разработкой математического обеспечения для анализа полета КЛА по нескольким программам NASA, и в том числе NIMBUS и спутника для исследования Солнца в период максимальной активности, а также вопросами динамики КЛА и моделирования. С 1978 г. д-р Маркли работает физиком в Отделении аэрокосмических систем научно-исследовательской военно-морской лаборатории, где он продолжает интенсивную деятельность в области пространственной ориентации КЛА и динамики орбитального движения, оценивания и управления. Д-р Маркли является автором многих журнальных статей и докладов по теоретической физике, по аэрокосмическим наукам и по астродинамике. Он был одним из основных авторов книги «Определение и управление пространственной ориентацией КЛА» под редакцией Дж. Р. Вертца (J. R. Wertz).

М. Д. Шустер (M. D. Shuster родился в 1943 г. в Бостоне, шт. Массачусетс. Он получил степень бакалавра по физике в Массачусетском технологическом институте, доктора философии по физике в Мэрилендском университете и магистра по электротехнике в Университете Джона Гопкинса. С 1970 по 1977 г. он занимался теоретической физикой и работал во Французской комиссии по атомной энергии, Париж (инженер-физик, 1970—1972 гг.), в Университете в Карлсруэ, ФРГ (преподаватель, 1972—1973 гг.), в Тель-Авивском университете, Израиль (преподаватель, 1973—1976 гг.) и в Карнеги-Меллонском университете, Питтсбург, шт. Пенсильвания (приглашенный доцент, 1976—1977 гг.). За этот период он выполнил исследования по вопросам взаимодействия элементарных частиц с ядрами, активно занимался преподавательской деятельностью в Англии, Франции и ФРГ. С 1977 г. он стал работать в отделении системных наук в Computer Sciences Corporation в Силвер-Спринг, шт. Мэриленд, где занимался анализом и разработкой математического обеспечения для КЛА по многочисленным проектам NASA, в том числе для спутников «Сисет», «Магсет», исследовательских спутников, спутника для исследования Солнца в период максимальной активности, спутника для исследования динамики и космического телескопа. С 1981 г. работает в Business and Technological Systems, Inc., где занимается теоретическими и практическими задачами оценивания, динамики и управления космических и оборонных систем. Д-ру Шустеру принадлежит большое число статей по теоретической физике, оцениванию и управлению, а в настоящее время он работает над книгой по оцениванию пространственной ориентации КЛА.

Базируясь на динамической модели, описывающей поведение системы во времени, и модели измерений чувствительных элементов, фильтр Калмана позволяет получить наиболее точные оценки параметров состояния системы — линейные оценки, использующие текущие и предыдущие измерения. Они должны идеально подходить для решения задач определения ориентации в стационарных условиях и на борту. Однако использовать фильтр Калмана можно лишь в тех случаях, когда известна точная динамическая модель.

Использование динамических уравнений, описывающих угловые движения КЛА, вносит значительные трудности в процесс построения фильтра. В частности, внешние моменты и распределенные внутренние кинетические моменты, обусловленные наличием на борту вращающихся и растровых приборов, приводят к существенным неопределенностям моделей. Для автономных КЛА с инерциальными чувствительными элементами эти трудности можно обойти. В этом случае угловую скорость КЛА получают с помощью показаний гироскопов. Для получения параметров ориентации используют кинематические уравнения и, кроме того, вводят дополнительные параметры состояния, характеризующие медленно меняющиеся погрешности гироскопов. Таким образом, показания гироскопов трактуются не как наблюдения, а шумы гироскопов являются скорее шумами объекта, чем помехами измерений.

Теоретически можно представить себе КЛА, стабилизированный относительно трех осей настолько жестко, что поведение системы во времени удается описать весьма точно без использования информации от гироскопов, или КЛА с одноосной стабилизацией, для описания движения которого достаточно использовать один гироскоп. Приведенные в настоящей работе алгоритмы элементарно сводятся к таким, которые можно применить в подобных случаях. Однако они почти не имеют практического значения, поскольку системы управления, обеспечивающие нужную точность стабилизации, безусловно, включают гироскопы, показания которых можно использовать с целью определения полной угловой скорости. Поэтому, почти без потери общности, мы проанализируем алгоритмы, предназначенные для КЛА с трехосными гироскопами.

В настоящей работе в качестве параметров ориентации используются кватернионы. Разработка фильтра Калмана для кватернионов вызвана требованием автономного определения параметров ориентации в реальном времени для системы стабилизации и необходимостью найти удобный способ записи научных результатов. Кватернионы обладают следующими преимуществами: 1) становятся линейными уравнения прогноза; 2) описание ориентации КЛА свободно от вырожденных случаев (не встречается ситуация, аналогичная случаю складывания рамок карданного подвеса); 3) матрица направляющих косинусов является алгебраической функцией от кватернионов (поэтому удается обойтись без трансцендентных функций).

Использование кватернионов в качестве параметров ориентации приводит к некоторым трудностям. Они вызваны отсутствием свойства линейной независимости четырех компонент кватерниона, связанных между собой одним ограничением, отражающим тот факт, что кватернион имеет единичную норму. Это ограничение приводит к вырожденности ковариационной матрицы векторов состояния. Различным способам устранения этих трудностей посвящена бо́льшая часть настоящей работы. Каждый из рассматриваемых фильтров прогнозирует кватернионы, как если бы его компоненты были независимы. Описанные методы отличаются уравнениями оценок, формой представления ковариационной матрицы и уравнениями, прогнозирующими поведение этой матрицы.

В принципе за счет расширения вектора состояния можно получить также оценки систематических погрешностей других чувствительных элементов. Однако, как правило, эти оценки не получают одновременно с оценками параметров ориентации из-за проблем, связанных с наблюдаемостью в условиях функционирования обычного КЛА. Поэтому здесь не будут рассмотрены методы оценки систематических погрешностей чувствительных элементов, отличных ст медленно меняющихся дрейфов гироскопов.

В разд. II дается обзор работ по приложениям фильтров Калмана к задачам оценивания параметров ориентации и по смежным вопросам. Поскольку задача определения ориентации является нелинейной, оптимальные оценки определяются с помощью расширенного фильтра Калмана, приведенного в разд. III без вывода. Кинематические уравнения рассматриваются в разд. IV, причем основное внимание уделяется кватернионам. Обсуждение гироскопов, используемых для моделирования системы отсчета, и моделей датчиков угловой ориентации дано в разд. V.

Уравнения состояния и уравнения, используемые при прогнозировании параметров ориентации, выводятся в разд. VI. Различные представления уравнений фильтрации обсуждаются в последующих пяти разделах. В разд. XII отмечаются преимущества разных методов. Некоторые интересные результаты приведены в приложении.

Цель настоящей работы состоит в рассмотрении существующих алгоритмов фильтрации, а не в разработке новых подходов. Была предпринята попытка представить современные методы в общей форме, что должно способствовать в будущем использованию фильтров Калмана для решения прикладных задач.

II. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Ранние примеры использования фильтров Калмана

Фильтр Калмана [1, 2], первоначально разработанный для решения задач нахождения линейных оценок, вскоре после этого был использован для решения нелинейных задач наведения и навигации в рамках программы «Аполлон» Шмидтом и его коллегами [3—4, 5 [3)]]. Почти одновременно с Калманом Сверлинг [6, 7 [3)]] разработал рекурсивный метод

[3)] Шмидт С. Ф. Фильтр Калмана: Его признание и развитие в авиационно-космических применениях.— Ракетная техника и космонавтика, 1981, т. 19, № 6, с. 163—168.

[3)] Сверлинг П. Замечание к статье «Статистический метод оптимальной навигации для космических полетов».— Ракетная техника и космонавтика, 1963, т. 1, № 8, с. 248.

для навигации спутников, который отличается от фильтра Калмана способом учета шумов объекта и отсутствием общности. Общепринятые трактовки фильтров Калмана можно найти в обзоре Соренсона [8] и руководствах Язвинского [9] и Гелба [10].

Детального и полного обзора применений фильтрации Калмана к задачам оценивания ориентации КЛА не существует, поскольку с самого начала эти вопросы имели прямое отношение к национальной безопасности и, следовательно, не могли освещаться в открытой литературе. Самая ранняя публикация принадлежит Фаррелу [11, 12], который исследовал модификацию фильтра Калмана, позволяющую по грубым замерам от солнечных датчиков и магнитометров обеспечить ориентацию с точностью, достигаемой при отсутствии сглаживания только за счет применения более сложной аппаратуры. Для описания ориентации КЛА Фаррел использовал углы Эйлера, а прогноз параметров ориентации осуществлялся им в предположении отсутствия внешних моментов. Черри и О'Коннор [13] в своем проекте автопилота для лунного модуля предусмотрели последовательную оценку возмущающих моментов, вызванных работой силовой установки, используемой на старте или при посадке. Поттер и Вандервельд [14] использовали теорию фильтров Калмана для оптимальной обработки показаний гироскопов и астроориентатора в системе определения ориентации. Вообще, как отмечает Саброфф [15], применение фильтров Калмана к задачам оценки параметров ориентации не давало впечатляющих результатов до 1967 г. Помимо недостаточной степени развития самой теории фильтрации отсутствие действительных успехов в использовании оптимальных оценок было вызвано недостаточной точностью динамических моделей систем.

О том, что работы в этом направлении продолжаются, свидетельствовал тот факт, что на симпозиуме по вопросам определения ориентации КЛА в 1969 г. было представлено шесть докладов, посвященных решению таких задач с помощью фильтров Калмана. Фудриат [16] и Аренсон и Нельсон [17] рассмотрели спутники, стабилизируемые вращением, а Рибарих [18] и Лесинский [19] — спутники с двойным вращением. Паулинг, Джексон и Браун [20] и Тода, Хейс и Шли [21] исследовали систему космической навигации «Спарс» (SPARS), использующую измерения гироскопов для построения уравнений объекта [4)] с периодической коррекцией от звездных датчиков. Паулинг и др. [20] использовали матрицу направляющих косинусов для прогноза параметров состояния и углы Эйлера при коррекции по замерам, в то время как Тода и др. [21] применили кватернионы для прогноза и приращения ошибок углов при коррекции по замерам. Кроме того, Джексон [22] представил на симпозиум доклад, посвященный использованию теории нелинейного оценивания при решении задачи определения ориентации. Этой же теме было посвящено исследование Кауи, Кумара и Грайлея [23].

В обзоре 1971 г. по бесплатформенным навигационным системам, выполненном Эдвардсом [24], фильтры Калмана не рассматривались, однако обсуждалась возможность использования кватернионов и ошибок углов при прогнозе параметров состояния. В обзоре Шмидтбауэра, Самуэльсона и Карлссона [25], охватывающем период до 1973 г., классифицируются и анализируются фильтры Калмана, применяемые при определении ориентации, причем особое внимание уделяется алгоритмам, которые могут быть реализованы на борту.

Способы описания пространственной ориентации

Нелинейные аспекты угловых движений обсуждались во многих работах [26, 27[5)], 28, 29, 30]. Поттером и Вандервельдом [14], Рибарихом [18], Шмидтбауэром и др. [25] и Фарренкопфом [31] были исследованы подходы, при которых каналы КЛА считались независимыми (и таким образом игнорировались ошибки, обусловленные некоммутативностью конечных поворотов). При таком допущении задача сводится к нахождению линейных оценок для трех независимых каналов, и в некоторых случаях могут быть получены замкнутые выражения для установившихся ошибок оценок [14, 25, 31]. Фильтры Калмана, не учитывающие перекрестные связи между различными каналами, использующие показания гироскопов и динамические модели, применялись в бортовых системах управления угловым движением некоторых КЛА, и в частности международного спутника NASA серии „Эксплорер", для исследования космических объектов в ультрафиолетовой части спектра и спутника для исследования Солнца в период максимальной активности [32]. Штольпнагель [33] и Маркли [34] сравнили различные параметры ориентации в случаях, когда нельзя пренебречь взаимосвязью между каналами. В первых бесплатформенных навигационных системах для описания пространственной ориентации использовались матрицы направляющих косинусов [20, 24]. При вычислении ориентации из-за ошибок округления, квантования и отбрасывания членов получали неортогональную матрицу направляющих косинусов [35, 36]. Были разработаны разные схемы ортогонализации матрицы направляющих косинусов, однако Гиардина, Бронсон и Валлен [36] доказали, что для оптимального решения этой задачи (при котором получают минимальную сумму квадратов разностей между соответствующими элементами вычисленной и ортогональной матриц) нужно использовать квадратный корень из матрицы, определение которого сопряжено с большим объемом вычислений. Из-за этого, а также из-за избыточности информации, содержащейся в девяти направляющих косинусах, этот метод в настоящее время не получил широкого распространения.

В некоторых ранних применениях фильтров Калмана к задачам оценки ориентации [11, 16, 17, 19, 20, 23] в качестве параметров ориентации были использованы углы Эйлера [26—30, 33, 34]. Однако кинематические уравнения, куда входят эти углы, являются нелинейными и содержат тригонометрические функции, определение которых сопряжено с

---

4) Авторами использован термин «in a model replacement mode». — *Прим. перев.*

5) Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. — М.: Гостехиздат, 1937.

большим объемом вычислений. Кроме того, при некоторых положениях объекта углы Эйлера становятся неопределенными (ситуация, аналогичная складыванию карданного подвеса). Все это приводит к трудностям при реализации фильтра Калмана. Несмотря на это, при решении задачи оценки ориентации вращающихся КЛА продолжают использовать углы Эйлера. Штюльпнагель [33] рассмотрел два других трехпараметрических способа описания ориентации с помощью экспоненты от кососимметрической матрицы размерности 3×3 (вектор поворота) и параметров Кейли (не путайте с параметрами Кейли — Клейна). Последний эквивалентен способу, использующему вектор Гиббса [34]. Ни одно из этих представлений, насколько нам известно, не было использовано при реализации фильтров Калмана. Штюльпнагель доказал, что ни одно трехпараметрическое представление не может быть одновременно и глобальным, и невырожденным.

Глобальному невырожденному описанию ориентации с помощью четырех симметрических параметров Эйлера, или, что то же самое, четырех составляющих кватерниона, были посвящены работы многих авторов [26—30, 33—37]. Кватернионы были предложены Гамильтоном [38] в 1843 г. Использованию их в задачах моделирования углового движения способствовали Робинсон [39] и Митчел и Роджерс [40]. Матрица направляющих косинусов, вычисленная в функции от элементов кватерниона (как однородная квадратическая функция), является ортогональной, если сумма квадратов составляющих кватерниона равна единице. Если ошибки вычисления приводят к нарушению этого условия, кватернион можно нормировать, разделив его составляющие на корень квадратный (скаляр) из суммы квадратов этих составляющих. Гиардина и др. [36] показали, что матрица направляющих косинусов, вычисленная в функции от элементов нормированного кватерниона, идентична матрице, получаемой с помощью оптимальной операции ортогонализации. В работах Вилкокса [35] и Мортенсона [41] обсуждаются возможности применения кватернионов в бесплатформенных инерциальных системах и анализируются их ошибки. Использованию кватернионов в кинематике были посвящены некоторые работы, появившиеся в последние годы [42[6], 43—46, 47[7], 48]. Большой интерес представляет оптимальный метод получения кватернионов по матрице направляющих косинусов [49—52]. Недавно появился обзор Фридленда [53] по кватернионам.

Следствием преимуществ кватернионов явилось их широкое применение в системах определения ориентации. Одним из примеров этого может служить попытка, предпринятая Лефферсом и Маркли [54], смоделировать динамические уравнения углового движения КЛА „Нимбус-6", которая показала, что описание динамики со сложно моделируемыми моментами пока еще не обеспечивает приемлемую точность определения ориентации. По этой причине в большей части приложений, в которых оценка ориентации выполняется с помощью кватернионов, для моделирования системы отсчета используются гироскопы. К ним относятся упомянутая выше работа Тода и др. [21], работа группы авторов из фирмы TRW, посвященная прецизионной системе определения пространственной ориентации [55], которая была использована в системе определения пространственного положения спутника „Хиэйоу" (HEAO) для изучения источников рентгеновского, гамма- и космического излучений на небесной сфере [56—58], работа Юнга и Хедлей [59], посвященная высокоманевренным КЛА, Мюрелля [60], посвященная многоцелевому блочному спутнику NASA, работа Соренсена, Шмидта и Гока [61[8]] об использовании метода корня квадратного, Шустера с соавторами [62—64] о бортовой системе определения пространственного положения с микропроцессорами и Маркли [65], посвященная исследованию автономных навигационных систем.

Модели шумов гироскопов

Первые статьи, содержащие статистические модели дрейфов гироскопов, принадлежащие Ньютону [66] и Хаммону [67], появились в 1960 г. Ньютон рассмотрел аддитивный белый шум в дрейфах гироскопов, в то время как Хаммон предположил, что скорости дрейфов гироскопов являются случайными процессами с экспоненциальными корреляционными функциями. Душман [68] рассмотрел модель скорости дрейфа, в которой к случайному процессу с автокорреляционной функцией Хаммона добавляется случайное блуждание. В ранних работах, посвященных фильтрам Калмана, обычно использовались усеченные модели шумов гироскопов. Так, Поттер и Вандервельд [14] представили скорость дрейфа в виде только случайного блуждания, а Паулинг и др. [20], Тода и др. [21] учитывали только белый шум. Фарренкопф [31, 69] рассмотрел модель ошибок гироскопа, включающую все перечисленные выше составляющие. Эта модель была использована при разработке системы для спутника „Хиэйоу" [56, 57].

III. ФИЛЬТР КАЛМАНА

В настоящем разделе мы даем основные уравнения расширенного фильтра Калмана [9, 10], чтобы ввести в рассмотрение обозначения, которые нам потребуются в дальнейшем.

Уравнение состояния можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), t) + g(x(t), t)\,w(t), \tag{1}$$

где $x(t)$ — вектор состояния, а $w(t)$ — шум процесса, являющийся гауссовским белым шумом со средним значением и ковариационной функцией вида

$$E[w(t)] = 0, \tag{2}$$

$$E[w(t)\,w^T(t')] = Q(t)\,\delta(t - t'), \tag{3}$$

---

[6] Икес Б. П. Новый метод выполнения численных расчетов, связанных с работой системы управления ориентацией, основанный на использовании кватернионов.— Ракетная техника и космонавтика, 1970, т. 8, № 1, с. 13—19.

[7] Мэйо Р. А. Переходная матрица для вычисления относительных кватернионов.— Ракетная техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 3, с. 184—189.

[8] Соренсен Дж. А., Шмидт С. Ф., Гока Т. Применение фильтрации с использованием квадратного корня из ковариационной матрицы для управления положением космического аппарата.— Ракетная техника и космонавтика, 1979, т. 17, № 12, с. 175—184.

где E обозначает операцию математического ожидания, а T — операцию транспонирования матрицы. Начальные значения математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния равны

$$E[x(t_0)] = \hat{x}(t_0) = x_0, \tag{4}$$

$$E\{[x(t_0) - x_0][x(t_0) - x_0]^T\} = P(t_0) = P_0. \tag{5}$$

Прогноз

При заданных начальных значениях вектора состояния и ковариационной матрицы вектора состояния оценкой вектора состояния с минимальной дисперсией ошибки на момент t, где $t > t_0$, при отсутствии измерений является условное ожидание

$$\hat{x}(t) = E[x(t) \mid \hat{x}(t_0) = x_0]. \tag{6}$$

Это оценка удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = E[f(x(t), t)] = \hat{f}(x(t), t), \tag{7}$$

которое мы приближенно запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), t). \tag{8}$$

Уравнение (8) может быть формально проинтегрировано:

$$\hat{x}(t) = \phi(t, \hat{x}(t_0), t_0). \tag{9}$$

Вектор ошибок параметров состояния и соответствующую ковариационную матрицу определим с помощью выражений

$$\Delta x(t) = x(t) - \hat{x}(t), \tag{10}$$

$$P(t) = E[\Delta x(t) \Delta x^T(t)]. \tag{11}$$

Пренебрегая в векторе параметров состояния и в шуме процесса членами, порядок которых выше первого, получим дифференциальное уравнение для вектора ошибок параметров состояния:

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = F(t)\Delta x(t) + G(t) w(t), \tag{12}$$

где

$$F(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, t)\Big|_{\hat{x}(t)}, \tag{13}$$

$$G(t) = g(\hat{x}(t), t). \tag{14}$$

Уравнение (12) можно формально проинтегрировать:

$$\Delta x(t) = \Phi(t, t_0)\Delta x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, t')G(t')w(t')\,dt', \tag{15}$$

где $\Phi(t, t_0)$ — переходная матрица, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0) = F(t)\Phi(t, t_0), \tag{16}$$

$$\Phi(t_0, t_0) = I. \tag{17}$$

Отметим, что для нелинейной системы $\Phi(t, t_0)$ неявно зависит также от $\hat{x}(t_0)$, но для упрощения записи этот факт здесь не отражен. Поведение ковариационной матрицы описывается уравнением Риккати вида

$$\frac{d}{dt}P(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + G(t)Q(t)G^T(t), \tag{18}$$

которое может быть проинтегрировано, в результате чего получим

$$P(t) = \Phi(t, t_0)P(t_0)\Phi^T(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, t')G(t')Q(t')G^T(t')\Phi^T(t, t')\,dt'. \tag{19}$$

Введем более компактные обозначения, в соответствии с которыми $\hat{x}_k(-)$ и $P_k(-)$ означают прогнозируемые значения вектора состояния и его ковариационной матрицы в момент t_k, а $\hat{x}_k(+)$ и $P_k(+)$ — значения тех же величин сразу же после выполнения измерений в момент t_k. С учетом этого можно записать

$$\hat{x}_{k+1}(-) = \phi(t_{k+1}, \hat{x}_k(+), t_k), \tag{20}$$

$$P_{k+1}(-) = \Phi_k P_k(+)\Phi_k^T + N_k. \tag{21}$$

Фильтрация

Вектор измерений, выполненных в момент t_k, связан с вектором состояния выражением

$$z_k = h(x_k) + v_k, \tag{22}$$

где шум измерений v_k — дискретный гауссовский процесс белого шума:

$$E[v_k] = 0, \tag{23}$$

$$E[v_k v_{k'}^T] = R_k \delta_{kk'}. \tag{24}$$

Оценка вектора x_k с минимальной дисперсией ошибки сразу же после проведения измерений задается выражением

$$\hat{x}_k(+) = \hat{x}_k(-) + K_k[z_k - h(\hat{x}_k(-))], \tag{25}$$

где матрица коэффициентов усиления Калмана имеет вид

$$K_k = P_k(-)H_k^T[H_k P_k(-)H_k^T + R_k]^{-1}, \tag{26}$$

а матрица чувствительности измерений есть

$$H_k = \frac{\partial h(x)}{\partial x}\Big|_{\hat{x}_k(-)}. \tag{27}$$

Ковариационная матрица сразу же после проведения измерений задается выражениями

$$P_k(+) = (I - K_k H_k)P_k(-) = \tag{28}$$

$$= (I - K_k H_k)P_k(-)(I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T. \tag{29}$$

Из уравнения (29) были получены многочисленные эффективные и устойчивые вычислительные алгоритмы фильтра Калмана [70].

В следующих разделах приведенные выше уравнения используются для решения задачи определения пространственной ориентации тремя различными способами. Для каждого из этих случаев получены явные выражения для переходной матрицы Φ и матрицы чувствительности H.

IV. КИНЕМАТИКА УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Пространственная ориентация анализируемых в настоящей работе систем задается с помощью кватерниона, определенного как

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} q \\ q_4 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

где

$$q = \bar{n}\sin(\theta/2), \qquad q_4 = \cos(\theta/2). \tag{31}$$

Единичный вектор $\bar{n}$ определяет ориентацию оси вращения, а θ является углом поворота. Кватернионы будем помечать чертой сверху. Кватернион имеет три степени свободы и удовлетворяет условию (32)

$$\bar{q}^T\bar{q} = I. \tag{32}$$

Матрицу направляющих косинусов получают из кватерниона с помощью соотношения

$$A(\bar{q}) = (|q_4|^2 - |q|^2) I_{3\times3} + 2qq^T + 2q_4[\underline{q}], \tag{33}$$

где

$$[\underline{q}] = \begin{bmatrix} 0 & q_3 & -q_2 \\ -q_3 & 0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Это обозначение будет использоваться обычно для любой несимметрической матрицы размерности 3×3, порожденной трехмерным вектором. Условимся, что A — матрица, позволяющая по известным координатам векторов в опорной (обычно инерциальной геоцентрической) системе координат определить компоненты этих векторов в связанной системе координат.

В отличие от обычного условия композиции кватернионов, установленного Гамильтоном [38], произведение двух кватернионов будем записывать в том же порядке, что и произведение двух матриц поворота. Таким образом,

$$A(\bar{q}')A(\bar{q}) = A(\bar{q}' \otimes \bar{q}). \tag{35}$$

Композиция кватернионов билинейна, т. е.

$$\bar{q}' \otimes \bar{q} = \{\bar{q}'\}\bar{q}, \tag{36}$$

где

$$\{\bar{q}'\} = \begin{bmatrix} q_4' & q_3' & -q_2' & q_1' \\ -q_3' & q_4' & q_1' & q_2' \\ q_2' & -q_1' & q_4' & q_3' \\ -q_1' & -q_2' & -q_3' & q_4' \end{bmatrix}, \tag{37}$$

или

$$\bar{q}' \otimes \bar{q} = \{\bar{q}\}\bar{q}', \tag{38}$$

где

$$\{\bar{q}\} = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 & q_1 \\ q_3 & q_4 & -q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Скорость изменения матрицы направляющих косинусов во времени определяется вектором угловой скорости ω

$$\frac{d}{dt}A(t) = [\underline{\omega}(t)]A(t). \tag{40}$$

Соответствующая скорость изменения кватерниона задается выражением

$$\frac{d}{dt}\bar{q}(t) = \tfrac{1}{2}\Omega(\omega(t))\bar{q}(t), \tag{41}$$

где

$$\Omega(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 & \omega_3 \\ -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

В следующих разделах четырехкомпонентный объект будем обозначать как

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \omega \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\bar{q}(t) = \tfrac{1}{2}\bar{\omega}(t) \otimes \bar{q}(t). \tag{44}$$

Если направление вектора ω остается постоянным на интересующем нас интервале времени или если «вектор поворота», определенный выражением

$$\Delta\theta = \int_t^{t+\Delta t} \omega(t')\,dt', \tag{45}$$

мал, тогда решение уравнения (41) имеет вид

$$\bar{q}(t+\Delta t) = M(\Delta\theta)\bar{q}(t), \tag{46}$$

где

$$M(\Delta\theta) = \cos(|\Delta\theta|/2) I_{4\times4} + \frac{\sin(|\Delta\theta|/2)}{|\Delta\theta|}\Omega(\Delta\theta). \tag{47}$$

V. МОДЕЛИ ЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Будем считать, что изучаемые КЛА оборудованы трехосными гироскопами, а также (негироскопическими) датчиками пространственной ориентации.

Модели гироскопов

Мы воспользуемся упрощенной, однако реалистической моделью гироскопа, разработанной Фарренкопфом [31] и использованной Хофманом и Маклори [57] при разработке спутника «Хиэйоу». В этой модели угловая скорость КЛА связана с вектором выходных сигналов гироскопа u соотношением

$$\omega = u - b - \eta_1. \tag{48}$$

Вектор b — систематическая (медленно меняющаяся) ошибка скорости дрейфа, а шум скорости дрейфа η_1 — гауссовский процесс белого шума:

$$E[\eta_1(t)] = 0, \tag{49}$$

$$E[\eta_1(t)\eta_1^T(t')] = Q_1(t)\delta(t-t'). \tag{50}$$

Систематическая составляющая скорости дрейфа не постоянна, а порождается вторым гауссовским процессом белого шума, так что производная от этой составляющей скорости дрейфа равна

$$\frac{d}{dt} b = \eta_2, \tag{51}$$

где

$$E[\eta_2(t)] = 0, \tag{52}$$

$$E[\eta_2(t)\eta_2^T(t')] = Q_2(t)\delta(t-t'). \tag{53}$$

Предполагается, что два случайных процесса не коррелированы:

$$E[\eta_1(t)\eta_2^T(t')] = 0. \tag{54}$$

Обычно u, b, η_1 и η_2 являются линейными комбинациями выходных сигналов трех или более гироскопов, которые не должны выставляться вдоль осей КЛА.

Другое уравнение для систематической составляющей скорости дрейфа

$$\frac{d}{dt} b = -b/\tau + \eta_2 \tag{55}$$

описывает случайный процесс с экспоненциальной автокорреляционной функцией, фигурирующий в модели, рассмотренной Хаммоном[67]. Для описания дрейфа реального гироскопа может потребоваться несколько таких составляющих с различными значениями постоянной времени [68]. Поскольку при работе гироскопов дрейфы меняются относительно медленно, по крайней мере одна из постоянных времени должна быть очень большой. В большинстве случаев можно считать, что τ бесконечно большая. При этом мы получаем уравнение (51).

В уравнениях движения, применяемых в фильтрах Калмана, фигурируют интегралы от соотношения (48). Иными словами, предполагается, что гироскопы используются в режиме датчиков угловой скорости. Однако на самом деле используются интегрирующие гироскопы, выходные сигналы которых зависят от угловых скоростей, но съем сигнала осуществляется дискретно. Параметры ориентации КЛА также вычисляются с фиксированным шагом, равным интервалу интегрирования гироскопом угловой скорости или нескольким таким интервалам. Если интервал вычисления параметров ориентации КЛА намного меньше, чем шаг вычисления оценок с помощью фильтра Калмана, с чем обычно мы сталкиваемся на практике, то гироскопы действительно можно рассматривать как непрерывные датчики угловой скорости.

Датчики пространственной ориентации

Под датчиком пространственной ориентации будем понимать здесь любой датчик, выходной сигнал которого зависит только от ориентации какого-то объекта в системе координат этого датчика. Таким образом, мы имеем дело с наиболее общим случаем, хотя, как правило, при использовании фильтров Калмана для оценки параметров ориентации такими датчиками являются векторные солнечные датчики и астроориентаторы, обеспечивающие высокую точность.

Ориентация объекта в системе координат датчика ρ_S связана с ориентацией в опорной системе координат ρ_R соотношением

$$\rho_S = TA(\bar{q})\rho_R, \tag{56}$$

где $A(\bar{q})$ — матрица направляющих косинусов КЛА, а T — матрица ориентации датчика. Отметим, что измерения зависят явно только от параметров ориентации, а такие параметры, как систематический дрейф гироскопов, в этом выражении не фигурируют.

В настоящей работе будем исходить из того, что измерения, выполняемые с помощью датчиков, являются скалярными и некоррелированными. Обычно корреляция между измерениями мала. Когда же это не так, всегда можно выполнить это условие за счет выбора таких измерений, для которых ковариационная матрица является диагональной.

VI. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

Параметры состояния, характеризующие пространственную ориентацию КЛА, задаются в виде кватерниона и вектора систематических составляющих скорости дрейфа гироскопов:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \bar{q}(t) \\ b(t) \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Таким образом, размерность вектора состояния равна семи. Кватернион и вектор дрейфа гироскопов должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt}\bar{q}(t) = \tfrac{1}{2}\Omega(u(t) - b(t) - \eta_1(t))\bar{q}(t), \tag{58}$$

$$\frac{d}{dt} b(t) = \eta_2(t). \tag{59}$$

Отмечая, что Ω является линейной и однородной матричной функцией своих аргументов, и вводя в рассмотрение функцию $\Xi(\bar{q})$ размерности 4×3 с помощью соотношения

$$\Omega(b)\bar{q} = \Xi(\bar{q})b, \tag{60}$$

уравнение (58) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\bar{q}(t) = \tfrac{1}{2}\Omega(u(t) - b(t))\bar{q}(t) - \tfrac{1}{2}\Xi(\bar{q}(t))\eta_1(t). \tag{61}$$

Теперь уравнения (59) и (61) имеют тот же вид, что и уравнение (1). Явной формой матрицы $\Xi(\bar q)$ является

$$\Xi(\hat q) = \begin{bmatrix} q_4 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_4 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_4 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{bmatrix}. \tag{62}$$

Свойства матрицы $\Xi(\bar q)$ анализируются в приложении.

Прогноз

Прогноз вектора состояния производится, как и в разд. II. Используя математические ожидания от уравнений (59) и (61) и приближение, описанное уравнением (8), получим

$$\frac{d}{dt}\hat{\bar q} = \tfrac12\Omega(\hat\omega)\hat{\bar q}, \tag{63}$$

$$\frac{d}{dt}\hat b = 0, \tag{64}$$

где

$$\hat\omega = u - \hat b \tag{65}$$

является оценкой угловой скорости.

Из уравнения (64) мы обнаруживаем, что $\hat b$ является постоянной на интервале прогнозирования. Таким образом, $\hat\omega$ зависит только от $u(t)$ и начального значения вектора состояния. Поэтому уравнение (63) может быть непосредственно проинтегрировано. При этом мы получим

$$\hat{\bar q}(t) = \Theta(t,t_k)\hat{\bar q}(t_k), \tag{66}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta(t,t_k) = \tfrac12\Omega(\hat\omega(t))\Theta(t,t_k), \tag{67}$$

$$\Theta(t_k,t_k) = I_{4\times4}. \tag{68}$$

Если направление вектора $\hat\omega(t)$ постоянно на рассматриваемом интервале или угол поворота осей мал, $\Theta(t,t_k)$ можно аппроксимировать уравнением (47).

VII. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ СЕДЬМОГО ПОРЯДКА

Проще всего вектор ошибок параметров состояния и его ковариационную матрицу можно определить с помощью полного вектора параметров состояния, как это было сделано в уравнениях (10) и (11).

Прогноз

Семимерный вектор ошибок параметров состояния удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = F(t)\Delta x(t) + G(t)w(t), \tag{69}$$

где

$$F(t) = \left[\begin{array}{c:c} \tfrac12\Omega(\hat\omega) & -\tfrac12\Xi(\hat{\bar q}) \\ \hdashline 0_{3\times4} & 0_{3\times3} \end{array}\right], \tag{70}$$

$$G(t) = \left[\begin{array}{c:c} -\tfrac12\Xi(\hat{\bar q}) & 0_{4\times3} \\ \hdashline 0_{3\times3} & I_{3\times3} \end{array}\right], \tag{71}$$

$$w(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}, \tag{72}$$

и поэтому

$$Q(t) = \left[\begin{array}{c:c} Q_1(t) & 0_{3\times3} \\ \hdashline 0_{3\times3} & Q_2(t) \end{array}\right]. \tag{73}$$

Матрицы $F(t)$ и $G(t)$ определяются уравнениями (13), (14), (59) и (61).

Переходная матрица имеет вид

$$\Phi(t,t_0) = \left[\begin{array}{c:c} \Theta(t,t_0) & \Psi(t,t_0) \\ \hdashline 0_{3\times4} & I_{3\times3} \end{array}\right], \tag{74}$$

где $\Theta(t,t_0)$ определяется уравнениями (67) и (68), а

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,t_0) = \tfrac12\Omega(\hat\omega(t,t_0))\Psi(t,t_0) - \tfrac12\Xi(\hat{\bar q}(t)) \tag{75}$$

при условии

$$\Psi(t_0,t_0) = 0_{4\times3}. \tag{76}$$

Уравнение (75) можно проинтегрировать, после чего получим

$$\Psi(t,t_0) = -\tfrac12\int_{t_0}^{t}\Theta(t,t')\Xi(\hat{\bar q}(t'))dt'. \tag{77}$$

Фильтрация

Поскольку мы предположили, что измерения скалярны, зависят только от пространственной ориентации объекта и не зависят от вектора систематических дрейфов, о чем уже говорилось в разд. V, матрица чувствительности является вектор-строкой размерности семь и имеет вид

$$H = [l, 0^T], \tag{78}$$

где

$$l = \left(\frac{\partial h}{\partial p_S}\frac{\partial p_S}{\partial \bar q}\right)\Bigg|_{\hat q(-)}. \tag{79}$$

Определим вектор r соотношением

$$r = \left[\frac{\partial h}{\partial p_S}T\right]^T. \tag{80}$$

Тогда можно показать, что

$$l = \left[\frac{\partial}{\partial\bar q}r\cdot A(\bar q)p_R\right]\Bigg|_{\hat q(-)} = 2(r\times\hat p_B)^T\Xi^T(\hat{\bar q}(-)), \tag{81}$$

где

$$\hat p_B = A(\hat{\bar q}(-))p_R. \tag{82}$$

VIII. ВЫРОЖДЕННОСТЬ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Ковариационная матрица вектора состояния размерности семь является вырожденной. Это следует непосредственно из условия нормированности кватерниона, так что,

$$\Delta \hat{q}^T \hat{q} = 0 \tag{83}$$

и, следовательно,

$$\begin{bmatrix} \hat{q}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

является нулевым вектором матрицы $P(t)$.

Эту вырожденность трудно обеспечить при вычислениях из-за накопления ошибок округления. Действительно, $P(t)$ может иметь даже отрицательные собственные значения. Самый простой способ обеспечения вырожденности заключается в описании $P(t)$ с помощью матрицы меньшей размерности. Эту идею можно реализовать тремя различными способами, два из которых дают одинаковые результаты. Анализ этих способов составит содержание остальной части настоящей работы.

IX. РЕДУЦИРОВАННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Используя приведенную выше форму переходной матрицы, можно представить ковариационную матрицу в виде матрицы размерности 6×6.

Прогноз

Можно показать (см. приложение), что

$$\Theta(t,t')\Xi(\hat{q}(t'))(=\Xi(\hat{q}(t))\Lambda(t,t'), \tag{84}$$

где

$$\Lambda(t,t') = A(\hat{q}(t))A^T(\hat{q}(t')) \tag{85}$$

есть матрица поворота размерности (3×3), которая осуществляет переход от матрицы направляющих косинусов, оцененной в момент t', к матрице направляющих косинусов в момент t. Подставляя ее в уравнение (77), получим

$$\Psi(t,t_0) = \Xi(\hat{q}(t))K(t,t_0), \tag{86}$$

где

$$K(t,t_0) = -\tfrac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \Lambda(t,t')\,dt'. \tag{87}$$

В приложении также показано, что

$$\Theta(t,t_0) = \Xi(\hat{q}(t))\Lambda(t,t_0)\Xi^T(\hat{q}(t_0)) + \hat{q}(t)\hat{q}^T(t_0). \tag{88}$$

Подставляя эти выражения в уравнение для переходной матрицы, получим

$$\Phi(t,t_0) = S(\hat{q}(t))\bar{\Phi}(t,t_0)S^T(\hat{q}(t_0)) + $$

$$+\left[\begin{array}{c:c} \hat{q}(t)\hat{q}^T(t_0) & 0_{4\times 3} \\ \hdashline 0_{3\times 4} & 0_{3\times 3} \end{array}\right], \tag{89}$$

где

$$S(\hat{q}(t)) = \left[\begin{array}{c:c} \Xi(\hat{q}(t)) & 0_{4\times 3} \\ \hdashline 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} \end{array}\right], \tag{90}$$

$$\bar{\Phi}(t,t_0) = \left[\begin{array}{c:c} \Lambda(t,t_0) & K(t,t_0) \\ \hdashline 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} \end{array}\right]. \tag{91}$$

Второй член в правой части уравнения (89) уничтожает $P(t_0)$ слева и $P(t)$ справа. Таким образом, если ковариационная матрица $\bar{P}(t)$ размерности (6×6) определена как

$$\bar{P}(t) = S^T(\hat{q}(t))P(t)S(\hat{q}(t)), \tag{92}$$

то она удовлетворяет интегральной форме уравнения Риккати:

$$\bar{P}(t) = \bar{\Phi}(t,t_0)\bar{P}(t_0)\bar{\Phi}^T(t,t_0) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} \bar{\Phi}(t,t')\bar{G}(t')Q(t')\bar{G}^T(t')\bar{\Phi}^T(t,t')\,dt', \tag{93}$$

где

$$\bar{G}(t) = S^T(\hat{q}(t))G(t) = \left[\begin{array}{c:c} -\tfrac{1}{2}I_{3\times 3} & 0_{3\times 3} \\ \hdashline 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} \end{array}\right]. \tag{94}$$

При выводе уравнения (93) было повторно использовано соотношение

$$\Xi^T(\hat{q})\hat{q} = 0. \tag{95}$$

Ковариационную матрицу $P(t)$ размерности (7×7) можно реконструировать в любой момент с помощью выражения

$$P(t) = S(\hat{q}(t))\bar{P}(t)S^T(\hat{q}(t)). \tag{96}$$

Фильтрация

Фильтр Калмана можно также построить с помощью матрицы $\bar{P}(t)$. Введем матрицу $\bar{H}_k$ размерности 1×6 и матрицу $\bar{K}_k$ размерности 6×1 с помощью соотношений

$$\bar{H}_k = H_k S(\hat{q}_k(-)), \tag{97}$$

$$\bar{K}_k = \bar{P}_k(-)\bar{H}_k^T[\bar{H}_k\bar{P}_k(-)\bar{H}_k^T + R_k]^{-1}, \tag{98}$$

где H_k та же, что и в разд. III. Теперь легко показать, что

$$\bar{P}_k(+) = (I_{6\times 6} - \bar{K}_k\bar{H}_k)\bar{P}_k(-), \tag{99}$$

$$K_k = S(\hat{q}_k(-))\bar{K}_k. \tag{100}$$

Используя этот метод, не нужно вообще вычислять ковариационную матрицу размерности 7×7. Прогноз и коррекция ковариационной матрицы размерности 6×6 выполняются с помощью уравнений (93) и (99) соответственно. Выражение для матрицы чувствительности $\bar{H}_k$ размерности 1×6 можно упростить; однако это выражение будет получено в разд. XI, поскольку к способу, описанному там, оно имеет более непосредственное отношение. В том же разделе содержатся независимые выводы алгоритмов прогноза и коррекции, которые оказываются идентичными приведенным здесь.

X. РЕДУКЦИЯ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ЗА СЧЕТ УМЕНЬШЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Наиболее очевидный способ уменьшения размерности ковариационной матрицы состоит в исключении одной компоненты кватерниона из вектора ошибок параметров состояния. Пусть это будет четвертая компонента, хотя вообще можно исключить и любую другую.

Тогда усеченным вектором ошибок параметров состояния будет

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \Delta q \\ \Delta b \end{bmatrix}. \tag{101}$$

С этим вектором нельзя обращаться так же просто, как с вектором размерности семь в разд. VIII. Мы считали, что все четыре компоненты кватерниона являются независимыми переменными, а условие нормировки обеспечивалось видом уравнения движения. В данном случае ошибку четвертой компоненты кватерниона нужно определять в соответствии с условием

$$\Delta q_4 = -\frac{1}{\hat{q}_4}\hat{q}\cdot\Delta q. \tag{102}$$

Таким образом, частные производные в этих случаях берутся по-разному.

Прогноз

Усеченная ковариационная матрица определяется соотношением

$$P_y(t) = E[\Delta y(t)\Delta y^T(t)], \tag{103}$$

которое удовлетворяет уравнению

$$\dot{P}_y(t) = \Phi_y(t,t_0)P_y(t_0)\Phi_y^T(t,t_0) + \int_{t_0}^{t}\Phi_y(t,t')G_y(t')Q(t')G_y^T(t')\Phi_y^T(t,t')\,dt', \tag{104}$$

где

$$\Phi_y(t,t_0) = \left[\begin{array}{c|c} \Theta_y(t,t_0) & \Psi_y(t,t_0) \\ \hline 0_{3\times 3} & I_{3\times 3} \end{array}\right] \tag{105}$$

есть переходная матрица размерности 6×6. Матрица $G_y(t)$ определена ниже.

Подматрицы матрицы $\Phi_y(t, t_0)$ можно легко выразить через соответствующие подматрицы матрицы $\Phi(t, t_0)$. Это проще, чем пытаться определить $\Phi_y(t, t_0)$ непосредственным интегрированием уравнения ошибок параметров состояния размерности 6.

Заметим, что

$$[\Theta_y(t,t_0)]_{ij} = \left(\frac{\partial q_i(t)}{\partial q_j(t_0)}\right)_y, \tag{106}$$

$$[\Psi_y(t,t_0)]_{ij} = \left(\frac{\partial q_i(t)}{\partial b_j(t_0)}\right)_y, \tag{107}$$

где нижний индекс y показывает, что частные производные должны быть вычислены с учетом ограничения. В соответствующих выражениях для $\Theta(t, t_0)$ и $\Psi(t, t_0)$ аналогичное ограничение не существует, так как ему удовлетворяет само уравнение состояния. Из этого факта непосредственно вытекает

$$[\Theta_y(t,t_0)]_{ij} = [\Theta(t,t_0)]_{ij} - \left(\frac{\hat{q}_j(t_0)}{\hat{q}_4(t_0)}\right)[\Theta(t,t_0)]_{i4}, \tag{108}$$

$$[\Psi_y(t,t_0)]_{ij} = [\Psi(t,t_0)]_{ij}, \tag{109}$$

а также

$$[G_y(t)]_{ij} = [G(t)]_{ij}, \tag{110}$$

Ковариационная матрица размерности 7×7 может быть получена из $P_y(t)$ за счет вычисления отсутствующих элементов по формулам

$$E[\Delta q_4(t)\Delta y_i(t)] = -\frac{1}{\hat{q}_4(t)}\sum_{j=1}^{3}\hat{q}_j(t)[P_y(t)]_{ji}, \tag{111}$$

$$E[\Delta q_4(t)\Delta q_4(t)] = \frac{1}{|\hat{q}_4(t)|^2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\hat{q}_i(t)[P_y(t)]_{ij}\hat{q}_j(t). \tag{112}$$

Фильтрация

Аналогично уравнениям (78) и (79) из разд. VII матрица чувствительности определяется как

$$H_y = [l_y, 0^T], \tag{113}$$

где вектор-строка l_y размерности три записывается в виде соотношения

$$l_y = \left(\frac{\partial h}{\partial p_S}\frac{\partial p_S}{\partial q}\right)_y\Big|_{|q|=1}, \tag{114}$$

которое сводится к

$$(l_y)_i = l_i - (\hat{q}_i/\hat{q}_4)l_4, \tag{115}$$

а l задается уравнением (81).

При реализации фильтра Калмана в этом случае ковариационную матрицу размерности 7×7 также определять не надо. Вектор состояния вычисляется с помощью алгоритма

$$\Delta\hat{y}(+) = K_y[z - h(\hat{q}(-))] = \begin{bmatrix} \Delta\hat{q}(+) \\ \Delta\hat{b}(+) \end{bmatrix}, \tag{116}$$

где K_y вычисляется в соответствии с уравнением (26) в функции от $P_y(-)$ и H_y. Уравнение (102) дает $\Delta\hat{q}_4(t)$, а оценка вектора состояния производится по формуле

$$\hat{x}(+) = \hat{x}(-) + \Delta\hat{x}(+) = \hat{x}(-) + \begin{bmatrix} \Delta\hat{q}(+) \\ \Delta\hat{b}(+) \end{bmatrix}. \tag{117}$$

Отметим, что символ $\Delta\hat{x}(+)$ в уравнении (117) обозначает просто разность $\hat{x}(+) - \hat{x}(-)$ и его не следует путать с символом $\Delta\hat{x}(t)$, который используется для обозначения ошибки оценки состояния. Поскольку ошибки оценки состояния никогда не появляются со значком «^» (их математическое ожидание равно нулю по определению), путаница маловероятна. Отметим также, что, как следует из уравнения (102), усечение вектора состония может привести к большим ошибкам, когда $\hat{q}_4$ мало. Этого можно избежать, если всегда исключать ту компоненту кватерниона, которая имеет самую большую величину.

XI. КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА В СВЯЗАННЫХ ОСЯХ

В этом разделе мы предлагаем приближенное описание вектора состояния и ковариационной матрицы в связанных с объектом осях. Ошибка кватерниона при этом записывается не как арифметическая разность между истинным кватернионом и его оценкой, а как кватернион, который, будучи умноженным на оценку, даст истинный кватернион. Поскольку этот дополнительный кватернион почти всегда соответствует малому повороту, четвертая его компонента будет очень близка к единице (с точностью до величин второго порядка малости относительно компонент векторной его части) и, следовательно, вся информация о пространственной ориентации содержится в трех компонентах векторной части кватерниона. Поэтому вектор размерности 6, составляющими которого являются три компоненты векторной части дополнительного кватерниона и компоненты вектора систематических дрейфов, дает представление об ошибках состояния без избыточности. Это представление идентично приведенному в разд. IX.

Если малые углы ошибки ориентации вычислить как удвоенные значения компонент векторной части дополнительного кватерниона, наш подход становится аналогичным использованному другими авторами [21, 59—65].

Определим кватернион ошибки как

$$\delta\bar q=\bar q\otimes\hat{\bar q}^{-1}, \tag{118}$$

а вектор ошибки в связанных осях размерности шесть как

$$\tilde x=\begin{bmatrix}\delta q\\ b\end{bmatrix}. \tag{119}$$

Из уравнений (30) и (62) мы получим

$$\bar q=\{\hat{\bar q}\}\delta\bar q=[\Xi(\hat{\bar q})\ \vdots\ \hat{\bar q}]\delta\bar q, \tag{120}$$

следовательно,

$$\delta q=\Xi^T(\hat{\bar q})\bar q, \tag{121}$$

$$\delta q_4=\hat{\bar q}^T\bar q, \tag{122}$$

$$\tilde x=\left[\begin{array}{c:c}\Xi^T(\hat{\bar q}) & 0_{3\times3}\\ \hdashline 0_{3\times4} & I_{3\times3}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\bar q\\ b\end{bmatrix}= \tag{123}$$

$$=S^T(\hat{\bar q})x, \tag{124}$$

тогда из уравнения (95) следует, что

$$\hat{\tilde x}=S^T(\hat{\bar q})\hat x=\begin{bmatrix}0\\ \hat b\end{bmatrix}, \tag{125}$$

$$\Delta\tilde x=S^T(\hat{\bar q})\Delta x=\begin{bmatrix}\delta q\\ \Delta b\end{bmatrix}. \tag{126}$$

Заметим, однако, что хотя

$$\Delta x=S(\hat{\bar q})\Delta\tilde x, \tag{127}$$

но

$$\hat x\neq S(\hat{\bar q})\hat{\tilde x}. \tag{128}$$

Теперь можно легко получить результаты, приведенные в разд. IX.

Прогноз

Из

$$\frac{d}{dt}\bar q=\tfrac12\bar\omega\otimes\bar q, \tag{129}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{\bar q}=\tfrac12\hat{\bar\omega}\otimes\hat{\bar q} \tag{130}$$

немедленно следует, что

$$\frac{d}{dt}\delta\bar q=\tfrac12\{\bar\omega\otimes\delta\bar q-\delta\bar q\otimes\hat{\bar\omega}\}=$$

$$=\tfrac12\{\hat{\bar\omega}\otimes\delta\bar q-\delta\bar q\otimes\hat{\bar\omega}\}+\tfrac12\delta\bar\omega\otimes\delta\bar q, \tag{131}$$

где

$$\delta\bar\omega=\begin{bmatrix}\delta\omega\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega-\hat\omega\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\Delta b-\eta_1\\ 0\end{bmatrix}. \tag{132}$$

Теперь

$$\tfrac12\{\hat{\bar\omega}\otimes\delta\bar q-\delta\bar q\otimes\hat{\bar\omega}\}=\begin{bmatrix}-\hat\omega\times\delta q\\ 0\end{bmatrix}, \tag{133}$$

$$\delta\bar\omega\otimes\delta\bar q=\delta\bar\omega+O(|\delta\omega|\,|\delta q|). \tag{134}$$

Таким образом, пренебрегая членами второго порядка малости, имеем

$$\frac{d}{dt}\delta q=-\hat\omega\times\delta q-\tfrac12(\Delta b+\eta_1), \tag{135}$$

$$\frac{d}{dt}\delta q_4=0, \tag{136}$$

а из этих соотношений следует, что уравнение ошибок параметров состояния можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\Delta\tilde x(t)=\tilde F(t)\Delta\tilde x+\tilde G(t)w(t), \tag{137}$$

где

$$\tilde F(t)=\left[\begin{array}{c:c}[\underline{\hat\omega}(t)] & -\tfrac12 I_{3\times3}\\ \hdashline 0_{3\times3} & 0_{3\times3}\end{array}\right], \tag{138}$$

$$\tilde G(t)=\left[\begin{array}{c:c}-\tfrac12 I_{3\times3} & 0_{3\times3}\\ \hdashline 0_{3\times3} & I_{3\times3}\end{array}\right]. \tag{139}$$

Матрица $\tilde G$ идентична заданной уравнением (94).

Переходную матрицу можно записать как

$$\tilde\Phi=\left[\begin{array}{c:c}\tilde\Theta & \tilde\Psi\\ \hdashline 0_{3\times3} & I_{3\times3}\end{array}\right] \tag{140}$$

с

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde\Theta(t,t_0)=[\underline{\hat\omega}(t)]\tilde\Theta(t,t_0), \tag{141}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde\Psi(t,t_0)=[\underline{\hat\omega}(t)]\tilde\Psi(t,t_0)-\tfrac12 I_{3\times3} \tag{142}$$

и начальными условиями

$$\tilde\Theta(t_0,t_0)=I_{3\times3},\qquad \tilde\Psi(t_0,t_0)=0_{3\times3}. \tag{143}$$

Из этого следует, что

$$\tilde\Theta(t,t_0)=\Lambda(t,t_0), \tag{144}$$

$$\tilde\Psi(t,t_0)=-\tfrac12\int_{t_0}^{t}\Lambda(t,t')\,dt'=K(t,t_0), \tag{145}$$

так что

$$\Phi(t,t_0)=\left[\begin{array}{c|c}\Lambda(t,t_0) & K(t,t_0)\\ \hline 0_{3\times 3} & I_{3\times 3}\end{array}\right], \qquad (146)$$

как и в уравнении (91).

Ковариационная матрица определена соотношением

$$\bar{P}(t)=E[\Delta\bar{x}(t)\Delta\bar{x}^T(t)]. \qquad (147)$$

Тогда из уравнения (127) следует, что

$$\bar{P}(t)=S^T(\hat{q}(t))P(t)S(\hat{q}(t)), \qquad (148)$$

$$P(t)=S(\hat{q}(t))\bar{P}(t)S^T(\hat{q}(t)), \qquad (149)$$

как и в разд. IX, а $\bar{P}(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{d}{dt}\bar{P}(t)=\bar{F}(t)\bar{P}(t)+\bar{P}(t)\bar{F}^T(t)+\bar{G}(t)Q(t)\bar{G}^T(t), \qquad (150)$$

интегральная форма которого просто совпадает с уравнением (93).

Фильтрация

По аналогии с предыдущими разделами примем, что

$$\bar{H}=[\bar{l}\,0^T], \qquad (151)$$

где трехмерная вектор-строка $\bar{l}$ определяется выражением

$$\bar{l}=\left(\frac{\partial h}{\partial p_S}\frac{\partial p_S}{\partial(\delta q)}\right)\Big|_{\hat{q}(-)}. \qquad (152)$$

Из

$$A(\hat{q})=A(\delta\hat{q})A(\hat{q}(-)) \qquad (153)$$

следует, что

$$\bar{l}=r\cdot\left(\frac{\partial}{\partial(\delta q)}A(\delta\hat{q})\hat{p}_B\right)\Big|_{\hat{q}(-)}, \qquad (154)$$

где

$$\hat{p}_B=A(\hat{q}(-))p_R. \qquad (155)$$

Замечая, что

$$A(\delta\hat{q})=I_{3\times 3}+2[\delta q], \qquad (156)$$

можно выполнить операции дифференцирования, получив в результате

$$\bar{l}=2(r\times\hat{p}_B)^T. \qquad (157)$$

Переход к алгоритмам фильтрации осуществляется так же, как и в разд. IX. Различие состоит в способе оценки вектора состояния, но оно кажущееся:

$$\Delta\hat{x}(+)=\begin{bmatrix}\delta\hat{q}(+)\\ \Delta\hat{b}(+)\end{bmatrix}=\bar{K}[z-h(\hat{q}(-))]. \qquad (158)$$

Из этого выражения следует

$$\hat{q}(+)=\delta\hat{q}(+)\otimes\hat{q}(-), \qquad (159)$$

$$\hat{b}(+)=\hat{b}(-)+\Delta\hat{b}(+) \qquad (160)$$

и

$$\delta\hat{q}(+)=\begin{bmatrix}\delta\hat{q}(+)\\ 1\end{bmatrix}. \qquad (161)$$

Замечая, что из уравнений (37) и (60) следует выражение

$$\delta\hat{q}\otimes\hat{q}=\hat{q}+\Omega(\delta\hat{q})\hat{q}= \qquad (162)$$

$$=\hat{q}+\Xi(\hat{q})\delta\hat{q}, \qquad (163)$$

мы убеждаемся в том, что этот алгоритм идентичен уравнению (100).

Снова отметим, что $\Delta x(+)$, $\delta\bar{\hat{q}}(+)$ и $\Delta\hat{b}(+)$, фигурирующие в уравнениях (158)—(163), обозначают не ошибки состояния, а коррекции фильтра для соответствующих величин, полученных в процессе прогноза, а именно $\hat{x}(+)-\hat{x}(-)$, $\bar{\hat{q}}(+)\otimes\bar{\hat{q}}(-)^{-1}$ и $\hat{b}(+)-\hat{b}(-)$ соответственно. И снова присутствие знака «^» позволяет избежать путаницы.

Если вместо дополнительного кватерниона воспользоваться ошибками углов, заданными выражением

$$\delta q=½\delta\theta, \qquad (164)$$

то алгоритмы несколько упрощаются за счет того, что в выражениях для $\bar{F}(t)$, $\bar{G}(t)$, $K(t, t_0)$ и $\bar{l}$ исчезают множители $^1/_2$, $^1/_4$ и 2. В остальном же вывод остается таким же.

XII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Во всех алгоритмах фильтра Калмана, приведенных выше, прогноз вектора состояния осуществляется идентично с помощью уравнений (63) и (64). При этом все четыре компоненты кватерниона считаются независимыми переменными. С точностью до вычислительных ошибок условие нормирования кватерниона обеспечивается структурой уравнения (63).

Норма кватерниона может быть нарушена за счет накопления ошибок округления и использования линеаризации при выводе уравнений коррекции оценок. Это не имеет отношения к операции прогноза кватерниона, поскольку эта операция линейная. Однако должны предусматриваться специальные меры при вычислении матрицы направляющих косинусов или при вычислении оценок состояния с учетом измерений. Тогда можно снова выполнять явную операцию нормирования кватерниона.

Прогноз ковариационной матрицы состояния и коррекция вектора состояния и ковариационной матрицы могут осуществляться различными способами. Три способа рассмотрены выше: использующий ковариационную матрицу полной размерности 7×7, усеченную ковариационную матрицу размерности 6×6 и ковариационную матрицу размерности 6×6 в связанных осях.

Первый способ, приведенный в разд. VII, является наиболее естественным, однако и наиболее трудоемким в смысле загрузки вычислителя, поскольку число элементов ковариационной матрицы оказывается самым большим. Бóльшая трудность заключается, однако, в необходимости обеспечения вырожденности ковариационной матрицы, ранг которой равен шести. Как указывалось в разд. VIII, ошибки округления могут привести к увеличению ранга матрицы или даже к появлению отрицательных собственных значений.

Использование усеченной ковариационной матрицы размерности 6×6 позволяет получать правильный ранг, но не приводит к уменьшению объема вычислений. Это объясняется тем, что в каждый момент нужно вычислять полную переходную матрицу размерности 7×7, а определяющая ее переходная матрица Φ_y размерности 6×6 должна вычисляться только в моменты проведения коррекции оценок с учетом измерений. Усилия, затрачиваемые на уменьшение размерности переходной матрицы, сводят на нет выгоды, получаемые за счет реализации уравнений коррекции оценок в пространстве меньшей размерности.

Использование ковариационной матрицы размерности 6×6 в связанных осях, предложенное в разд. IX и XI, позволяет получить правильный ранг ковариационной матрицы и значительно сократить объем вычислений. Но при этом все время вычисляются переходная и ковариационная матрицы размерности 6×6. Особо следует подчеркнуть тот факт, что элементы ковариационной матрицы в этом случае интерпретируются просто с помощью систематических ошибок гироскопов и ошибок определения углов в связанных осях. Кроме того, матрицы $\check{G}$ и $\check{H}$ имеют особенно простой вид.

В любых алгоритмах фильтра Калмана основной объем вычислений обычно приходится на определение переходной матрицы и учет влияния шума процесса на ковариационную матрицу состояния. Эти величины не нужно вычислять с той же точностью, что и вектор состояния, и, следовательно, их можно вычислять с гораздо большим шагом, чем шаг прогноза вектора состояния. По этой же причине при вычислении переходной матрицы и составляющей ковариационной матрицы, обусловленной шумом процесса, можно использовать приближенные соотношения.

ПРИЛОЖЕНИЕ. МАТРИЦА $\Xi(\bar{q})$

Матрица $\Xi(\bar{q})$, определенная уравнением (62), обладает некоторыми очень полезными свойствами, которые значительно упрощают процесс вычисления ковариационной и переходной матриц. В настоящем приложении будет доказан следующий результат:

$$\frac{d}{dt}\Xi(\bar{q}(t)) = \tfrac{1}{2}\Omega(\omega)\Xi(\bar{q}(t)) - \Xi(\bar{q}(t))[\underline{\omega}], \tag{A1}$$

$$\dot{\Theta}(t,t_0)\Xi(\bar{q}(t_0)) = \Xi(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0), \tag{A2}$$

$$\Lambda(t,t_0) = \Xi^T(q(t))\Theta(t,t_0)\Xi(\bar{q}(t_0)), \tag{A3}$$

$$\dot{\Theta}(t,t_0) = \Xi(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0)\Xi^T(\bar{q}(t_0)) + \bar{q}(t)\bar{q}^T(t_0). \tag{A4}$$

В приведенных выше уравнениях предполагается, что поведение кватерниона определяется соотношениями

$$\frac{d}{dt}\bar{q}(t) = \tfrac{1}{2}\Omega(\omega)\bar{q}(t), \tag{A5}$$

$$\bar{q}(t) = \Theta(t,t_0)\bar{q}(t_0), \tag{A6}$$

и, следовательно, он действительно совпадает с $\hat{\bar{q}}(t)$. Однако для упрощения обозначений мы не будем ставить значок „^" над $\bar{q}$ и ω. Кроме того, ω может зависеть от времени, хотя мы эту зависимость явно показывать не будем.

Чтобы доказать уравнение (A1), заметим, что по определению для любого трехмерного вектора c мы имеем

$$\Xi(\bar{q})c = \Omega(c)\bar{q}. \tag{A7}$$

Дифференцируя уравнения (A7), получим

$$\dot{\Xi}(\bar{q})c + \Xi(\bar{q})\dot{c} = \Omega(\dot{c})\bar{q} + \Omega(c)\dot{\bar{q}}. \tag{A8}$$

Пусть в момент t вектор c имеет произвольное значение, и пусть производная от c по времени задана выражением

$$\dot{c} = [\underline{\omega}]c = -\omega\times c. \tag{A9}$$

Подставляя уравнения (A5) и (A9) в (A8), получим

$$\dot{\Xi}(\bar{q})c + \Xi(\bar{q})[\underline{\omega}]c = -\Omega(\omega\times c)\bar{q} + \tfrac{1}{2}\Omega(c)\Omega(\omega)\bar{q}. \tag{A10}$$

Легко доказать, что

$$\Omega(\omega\times c) = -\tfrac{1}{2}[\Omega(\omega)\Omega(c) - \Omega(c)\Omega(\omega)]. \tag{A11}$$

Подставляя это выражение в уравнение (A10), учитывая уравнение (A7) и принимая во внимание, что $c(t)$ — произвольный вектор, получим непосредственно уравнение (A1).

Чтобы доказать уравнение (A2), проанализируем величину

$$C(t,t_0) = \Theta(t,t_0)\Xi(\bar{q}(t_0)) - \Xi(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0). \tag{A12}$$

Дифференцируя это выражение и используя уравнение (A1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t,t_0) = \tfrac{1}{2}\Omega(\omega)C(t,t_0), \tag{A13}$$

которое непосредственно интегрируется. В результате получим

$$C(t,t_0) = \Theta(t,t_0)C(t_0,t_0). \tag{A14}$$

Но из уравнения (A12) следует

$$C(t_0,t_0) = 0_{4\times 3} \tag{A15}$$

и уравнение (A2).

Уравнение (A3) получается непосредственно после применения соотношения

$$\Xi^T(\bar{q})\Xi(\bar{q}) = I_{3\times 3} \tag{A16}$$

к уравнению (A2).

Чтобы получить уравнение (A4), отметим, что подстановка обратного соотношения

$$\Xi(\bar{q})\Xi^T(\bar{q}) = I_{4\times 4} - \bar{q}\bar{q}^T \tag{A17}$$

в уравнение (A2) приводит к соотношению

$$\Theta(t,t_0)(I_{4\times 4} - \bar{q}(t_0)\bar{q}^T(t_0)) = \Xi(\bar{q}(t))\Lambda(t,t_0)\Xi^T(\bar{q}(t_0)). \tag{A18}$$

Заметим, что

$$\Theta(t,t_0)\dot{q}(t_0)\dot{q}^T(t_0) = \dot{q}(t)\dot{q}^T(t_0). \qquad \text{(A19)}$$

Из этого следует уравнение (А4).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems," Paper 59-IRD-11 presented at ASME Instruments and Regulators Conference, March 29-April 2, 1959, (also *Transactions of ASME, Series D, Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, March 1960, pp. 35-45).

[2] Kalman, R.E. and Bucy, R.S., "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory," *Transactions of ASME, Series D, Journal of Basic Engineering*, Vol. 83, March 1961, pp. 95-108.

[3] Smith, G.L. and Schmidt, S.F., "The Application of Statistical Filter Theory to Optimal Trajectory Determination Onboard a Circumlunar Vehicle," Paper 61-92, presented at AAS Meeting, Aug. 1-3, 1961.

[4] McLean, J.D. and Schmidt, S.F., "Optimal Filtering and Linear Prediction Applied to an On-Board Navigation System for the Circumlunar Mission," Paper 61-93, presented at AAS Meeting, Aug. 1-3, 1961.

[5] Schmidt, S.F., "The Kalman Filter: Its Recognition and Development for Aerospace Applications," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, Jan.-Feb. 1981, pp. 4-7.

[6] Swerling, P., "First Order Error Propagation in a Stagewise Smoothing Procedure for Satellite Observations," Rand Paper P-1674, Feb. 19, 1959, (also *Journal of the Astronautical Sciences*, Vol. 6, Autumn 1959, pp. 46-52).

[7] Swerling, P., "Comment on 'A Statistical Optimizing Navigation Procedure for Space Flight'," *AIAA Journal*, Vol. 1, 1963, p. 1968.

[8] Sorenson, H.W., "Kalman Filtering Techniques," *Advances in Control Systems*, Vol. 3, edited by C.T. Leondes, Academic Press, New York, 1966.

[9] Jazwinski, A., *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Academic Press, New York, 1970.

[10] Gelb, A., Ed., *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1974.

[11] Farrell, J.L., "Attitude Determination by Kalman Filtering," Vol. 1, NASA-CR-598, Sept. 1964.

[12] Farrell, J.L., "Attitude Determination by Kalman Filtering," *Automatica*, Vol. 6, 1970, pp. 419-430.

[13] Cherry, G.W. and O'Connor, J., "Design Principles of the Lunar Excursion Module Autopilot," MIT Rept. R-499, July 1965.

[14] Potter, J.E. and Vander Velde, W.E., "Optimum Mixing of Gyroscope and Star Tracker Data," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 5, May 1968, pp. 536-540.

[15] Sabroff, A.E., "Advanced Spacecraft Stabilization and Control Techniques," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 5, Dec. 1968, pp. 1377-1393.

[16] Foudriat, E.G., "A Limited Memory Attitude Determination System Using Simplified Equations of Motion," *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corp. Rept. TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, Sept.-Oct. 1969, pp. 15-27.

[17] Arneson, G.R. and Nelson, A.D., "The Development and Performance of an Attitude Determination Data Reduction and Analysis System," *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corp. Rept. TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, Sept.-Oct. 1969, pp. 223-233.

[18] Ribarich, J.J., "Gyrostat Precision Attitude Determination and Control," *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corp. Rept. TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, Sept.-Oct. 1969, pp. 387-396.

[19] Lesinski, J.E., "Attitude Determination Performance Potential for a Yaw-Spin Satellite, Part One: Formulation of the Estimation Equations," *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corp. Rept. TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, Sept.-Oct. 1969, pp. 397-413.

[20] Pauling, D.C., Jackson, D.B., and Brown, C.D., "SPARS Algorithms and Simulation Results," *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corp. Rept. TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, Sept.-Oct. 1969, pp. 293-317.

[21] Toda, N.F., Heiss, J.L., and Schlee, F.H., "SPARS: The System, Algorithms, and Test Results," *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corp. Rept. TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, Sept.-Oct. 1969, pp. 361-370.

[22] Jackson, D.B., "Applications of Nonlinear Estimation Theory to Spacecraft Attitude Determination Systems," *Proceedings of the Symposium on Spacecraft Attitude Determination*, Aerospace Corp. Rept. TR-0066 (5306)-12, Vol. 1, Sept.-Oct. 1969, pp. 89-111.

[23] Kau, S., Kumar, K.S.P., and Granley, G.B., "Attitude Determination via Nonlinear Filtering," *IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-5, Nov. 1969, pp. 906-911.

[24] Edwards, A., "The State of Strapdown Inertial Guidance and Navigation," *Navigation*, Vol. 18, Winter 1971-72, pp. 386-401.

[25] Schmidtbauer, B., Samuelsson, H., and Carlsson, A., "Satellite Attitude Control and Stabilization Using On-Board Computers," Organization Européenne de Recherches Spatiales, ESRO CR-100, July 1973.

[26] Klein, F. and Sommerfeld, A., *Über die Theorie des Kreisels*, Teubner, Leipzig, pp. 1897-1910 (also Johnson Reprint, New York, 1965).

[27] Whittaker, E.T., *Analytical Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1937, (also Dover, New York, 1944).

[28] Hamel, G., *Theoretische Mechanik*, Springer-Verlag, Berlin, 1949, (corrected reprint, 1967).

[29] Goldstein, H., *Classial Mechanics*, 2nd Ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980.

[30] Farrell, J.L., *Integrated Aircraft Navigation*, Academic Press, New York, 1976.

[31] Farrenkopf, R.L., "Analytic Steady-State Accuracy Solutions for Two Common Spacecraft Attitude Estimators," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, July-Aug. 1978, pp. 282-284.

[32] Markley, F.L., "Attitude Control Algorithms for the Solar Maximum Mission," AIAA Paper 78-1247, Aug. 1978.

[33] Stuelpnagel, J., "On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group," *SIAM Review*, Vol. 6, Oct. 1964, pp. 422-430.

[34] Markley, F.L., "Parameterizations of the Attitude," *Spacecraft Attitude Determination and Control*, edited by J.R. Wertz, D. Reidel, Dordrecht, the Netherlands, 1978.

[35] Wilcox, J.C., "A New Algorithm for Strapped-Down Inertial Navigation," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-3, Sept. 1967, pp. 796-802.

[36] Giardina, C.R., Bronson, R., and Wallen, L., "An Optimal Normalization Scheme," *IEEE Transactions on Aerospace and Electonic Systems*, Vol. AES-11, July 1975, pp. 443-446.

[37] Fallon, L., "Quaternions," *Spacecraft Attitude Determination and Control*, edited by J.R. Wertz, D. Reidel, Dordrecht, the Netherlands, 1978.

[38] Hamilton, W.R., *Elements of Quaternions*, Longmans, Green, and Co., London, 1866.

[39] Robinson, A.C., "On the Use of Quaternions in the Simulation of Rigid-Body Motion," Wright Air Development Center, Tech. Rept. 58-17, Dec. 1958.

[40] Mitchell, E.E.L. and Rogers, A.E., "Quaternion Parameters in the Simulation of a Spinning Rigid Body," *Simulation*, June 1965, pp. 390-396.

[41] Mortenson, R.E., "Strapdown Guidance Error Analysis," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-10, July 1974, pp. 451-457.

[42] Ickes, B.P., "A New Method for Performing Digital Control System Attitude Computations Using Quaternions," *AIAA Journal*, Vol. 8, Jan. 1970, pp. 13-17.

[43] Grubin, C., "Derivation of the Quaternion Scheme via the Euler Axis and Angle," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 7, Oct. 1970, pp. 1261-1263.

[44] Hendley, A.C., "Quaternions for Control of Space Vehicles," *Proceedings of the Institute of Navigation National Space Meeting of Space Shuttle, Space Station, and Nuclear Shuttle Navigation*, George C. Marshall Space Flight Center, Huntsville, Ala., Feb. 1971, pp. 335-352.

[45] Altman, S.P., "A Unified State Model of Orbital Trajectory and Attitude Dynamics," *Celestial Mechanics*, Vol. 6, Dec. 1972, pp. 425-446.

[46] Grubin, C., "Attitude Determination for a Strapdown Inertial System Using the Euler Axis/Angle and Quaternion Parameters," AIAA Paper 73-900, Aug. 1973.

[47] Mayo, R.A., "Relative Quaternion State Transition Relation," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 2, Jan.-Feb. 1979, pp. 44-48.

[48] Yen, K. and Cook, G., "Improved Local Linearization

Algorithm for Solving the Quaternion Equations," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 3, Sept.-Oct. 1980, pp. 468-471.

[49] Klumpp, A.R., "Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction Cosine Matrix," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 13, Dec. 1976, pp. 754-755.

[50] Shepperd, S.W., "Quaternion from Rotation Matrix," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 1, May-June 1978, pp. 223-224.

[51] Spurrier, R.A., "Comment on 'Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction Cosine Matrix'," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 15, July-Aug. 1978, pp. 255-256.

[52] Grubin, C., "Quaternion Singularity Revisited," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 2, May-June 1979, pp. 255-256.

[53] Friedland B., "Analysis Strapdown Navigation Using Quaternions," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-14, Sept. 1978, pp. 764-768.

[54] Lefferts, E.J. and Markley, F.L., "Dynamics Modeling for Attitude Determination," AIAA Paper 76-1910, Aug. 1976.

[55] Iwens, R.P. and Farrenkopf, R.L., "Performance Evaluation of a Precision Attitude Determination Scheme," AIAA Paper 71-964, Aug. 1971.

[56] Hoffman, D.P., "HEAO Attitude Control Subsystem—A Multimode/Multimission Design," AIAA Paper 76-1925, Aug. 1976.

[57] Hoffman, D.P. and McElroy, T.T., 'HEAO Attitude Reference Design," AAS Paper 78-120, March 1978.

[58] Rose, E.F. and Berkery, E.A., "On-Orbit Control System Performance of the HEAO-2 Observatory," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 4, March-April 1981, pp. 148-156.

[59] Yong, K. and Headley, R.P., "Real-Time Precision Attitude Determination System (RETPAD) for Highly Maneuverable Spacecrafts," AIAA Paper 78-1246, Aug. 1978.

[60] Murrell, J.W., "Precision Attitude Determination for Multimission Spacecraft," AIAA Paper 78-1248, Aug. 1978.

[61] Sorensen, J.A., Schmidt, S.F., and Goka, T., "Application of Square-Root Filtering for Spacecraft Attitude Control," *Journal of Guidance and Control*, Vol. 2, Sept.-Oct. 1979, pp. 426-433.

[62] Shuster, M.D., Ray, S.N., and Gunshol, L., "Autonomous Onboard Attitude Determination System Specifications and Requirements," Computer Sciences Corp. Rept. CSC/TM-80/6237, 1980.

[63] Gambardella, P., Church, V., Liu, K., Rao, G., Ray, S., and Shuster, M., "Microprocessor-Based Autonomous Attitude Determination System Design," Computer Sciences Corp., Rept. CSC/TM-81/6085, 1981.

[64] Shuster, M.D., "Attitude Error Analysis Program (ATTERP) Mathematical Description," Computer Sciences Corp., Rept. CSC/TM-81/6012, Feb. 1981.

[65] Markley, F.L., "Autonomous Satellite Navigation Using Landmarks," AAS Paper 81-205, Aug. 1981.

[66] Newton, G.C., "Inertial-Guidance Limitations Imposed by Fluctuation Phenomena in Gyroscopes," *Proceedings of the IRE*, Vol. 48, April 1960, pp. 520-527.

[67] Hammon, R.L., "An Application of Random Process Theory to Gyro Drift Analysis," *IRE Transactions on Aeronautical and Navigational Electronics*, Vol. ANE-7, Sept. 1960, pp. 84-91.

[68] Dushman, A., "On Gyro Drift Models and Their Evaluation," *IRE Transactions on Aerospace and Navigational Electronics*, Vol. ANE-9, Dec. 1962, pp. 230-234.

[69] Farrenkopf, R.L., "Generalized Results for Precision Attitude Reference Systems Using Gyros," AIAA Paper 74-903, Aug 1974.

[70] Bierman, G.J., *Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation*, Academic Press, New York, 1977.